Date :   /   /   Subject: ....

معادلات فيزيائية

نركز على الزائدية والمكافئة

. إيجاد الحل العام للمعادلات تكافئية زائدية في حال الأشكال النموذجية البسيطة.

. لإيجاد الحل العام للمعادلة في النمط الزائدي والمكافئ نحول المعادلة إلى الشكل النموذجي أولاً.

. إذا لم تكن معطاة بالشكل النموذجي، كما ورد سابقاً وعندئذ يمكن رد المعادلة إلى معادلة تفاضلية خطية عادية في المرتبة الأولى أو ذات متحولات منفصلة.

. وذلك بتثبيت أحد المتغيرين في بعض الأحيان ومن ثم توجد الحل العام لها

ص 8 مثال

. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $u_{xy} = f(x, y)$ ---(1)

. المعادلة معطاة بالشكل النموذجي وهي من النمط الزائدي

$$\frac{\partial}{\partial y}[u_x] = f(x, y)$$

. نثبت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \int_0^y f(x, z)\, dz + c(x)$$

. حيث c دالة ثابتة اختيارية.

. نثبت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أن

$$u = \int_0^x \int_0^y f(\xi, z)\, dz\, d\xi + \int c_1(x)\, dx + \psi(y)$$

$$u = \int_0^x \int_0^y f(\xi, z)\, dz\, d\xi + c(x) + \psi(y)$$

$$u = x \cdot e^y$$

xy

مثال 5 ص 49

كلها على النمط الزائدي

Date : / / م 46 ص -3 Subject:

$\frac{\partial}{\partial y}[u_x] = x.e^y$

نثبت x و المكاملة بالنسبة لـ y لذلك.

$u_x = \int x e^y \, dy + \varphi_1(x)$

$u_x = x.e^y + \varphi_1(x)$

نثبت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد:

$u = \frac{1}{2} e^y . x^2 + \int \varphi_1(x) \, dx + \psi(y)$

$$u(x,y) = \frac{1}{2} e^y . x^2 + \varphi(x) + \psi(y)$$

علماً أن ψ دالة اختيارية تابعة لـ y فقط ، φ دالة تابعة لـ x فقط

$u_{xy} = e^y . x + 1 . \varphi'(x)$

$u_{xy} = e^y . x \; , \; e^y . x \overset{?}{=} x e^y$

مثال 5 ص 49

$u_{xy} + A(x,y) . u_x = 0 \leftarrow f(x,y)$

نفرض $u_x = v$

$v_y + A(x,y) . v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -A(x,y) . dy$

نثبت x لتعيين معادلة ذات متحولات منفصلة

$\frac{dv}{v} = -A(x,y) \, dy$

$\ln \frac{v}{\varphi(x)} = -\int_0^y A(x,z) \, dz \Rightarrow$

$v = \varphi(x) . e^{-\int_0^y A(x,z) \, dz}$, $u_x = \varphi(x) \, e^{-\int_0^y A(x,z) \, dz}$

نثبت y والمتكاملة بالنسبة لـ x لحد : x

$$u(x,y) = \int_0^x 6(\xi) e^{-\int_0^y A(\xi,\varepsilon)\,dz}\, d\xi + \psi(y)$$

مثال 2 ص ٤٤

$$x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

$A = x^2 ,\quad 2B = 2xy \quad C = y^2$

$B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 = 0 \quad > 0 \quad < 0$

من النمط الزائدي — من النمط الناقصي

المعادلة من النمط المكافئ.

المعادلة المميزة.

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$$

$$x^2\,dy^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2\,dx^2 = 0$$

معادلة تفاضلية غير محلولة بالنسبة للمشتق

$$(x\,dy - y\,dx)^2 = 0$$

$$x\,dy - y\,dx = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln\frac{y}{x} = \ln c_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$+ \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 0}{x^2} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln x = -\ln c_1$$

$$\ln\frac{y}{x} = \ln c_1 \rightarrow \frac{y}{x} = c_1$$

Date : / / Subject:

نجري التحويل .

اختيارية أما x أو y ← $\xi = x$ ، $\eta = \frac{y}{x}$ لسبب / زنتيا

$\xi_x = 1$, $\xi_y = 0$, $\xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0$

$\eta_x = \frac{-y}{x^2}$, $\eta_y = \frac{1}{x}$, $\eta_{xx} = \frac{2y}{x^3}$, $\eta_{yy} = 0$, $\eta_{xy} = -\frac{1}{x^2}$

$u_{xy} = u_{\xi\xi}\,\xi_x\xi_y + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y$

$+ u_\xi\,\xi_{xy} + u_\eta\,\eta_{xy} = \dots\star$

$u_{xy} = (\frac{1}{x})u_{\xi\eta} - \frac{y}{x^3}u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}u_\eta)$

للحصول على u_{xx} نبدل بـ $\star$ كل y بـ x

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\,\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\,\eta_x^2 + u_\xi\,\xi_{xx}$

$+ u_\eta\,\eta_{xx}$

$u_{xx} = u_{\xi\xi} - \frac{2y}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\eta$

للحصول على u_{yy} نبدل بـ $\star$ كل x بـ y

$u_{yy} = u_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\,\eta_y^2 + u_\xi\,\xi_{yy} + u_\eta\,\eta_{yy}$

$(u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta})$

$x^2 u_{\xi\xi} - 2y\,u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta + 2xy[\frac{1}{x}u_{\xi\eta} -$

$\frac{y}{x^3}u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}u_\eta] + \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} = 0$

Date : / / Subject:

أمثال $u_{\xi\xi}$. x^2

أمثال $u_{\eta\eta}$ $u_{\eta\eta}$: $\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 0$

أمثال $u_{\xi\eta}$ $-2y + 2y = 0$

أمثال u_η $\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} = 0$

المعادلة تأخذ الشكل الآتي $\div x^2$:

$x^2 u_{\xi\xi} = 0 \Rightarrow u_{\xi\xi} = 0$

نثبت η و نكامل بالنسبة لـ ξ $\frac{\partial}{\partial \xi}(u_\xi) = 0 \Rightarrow$

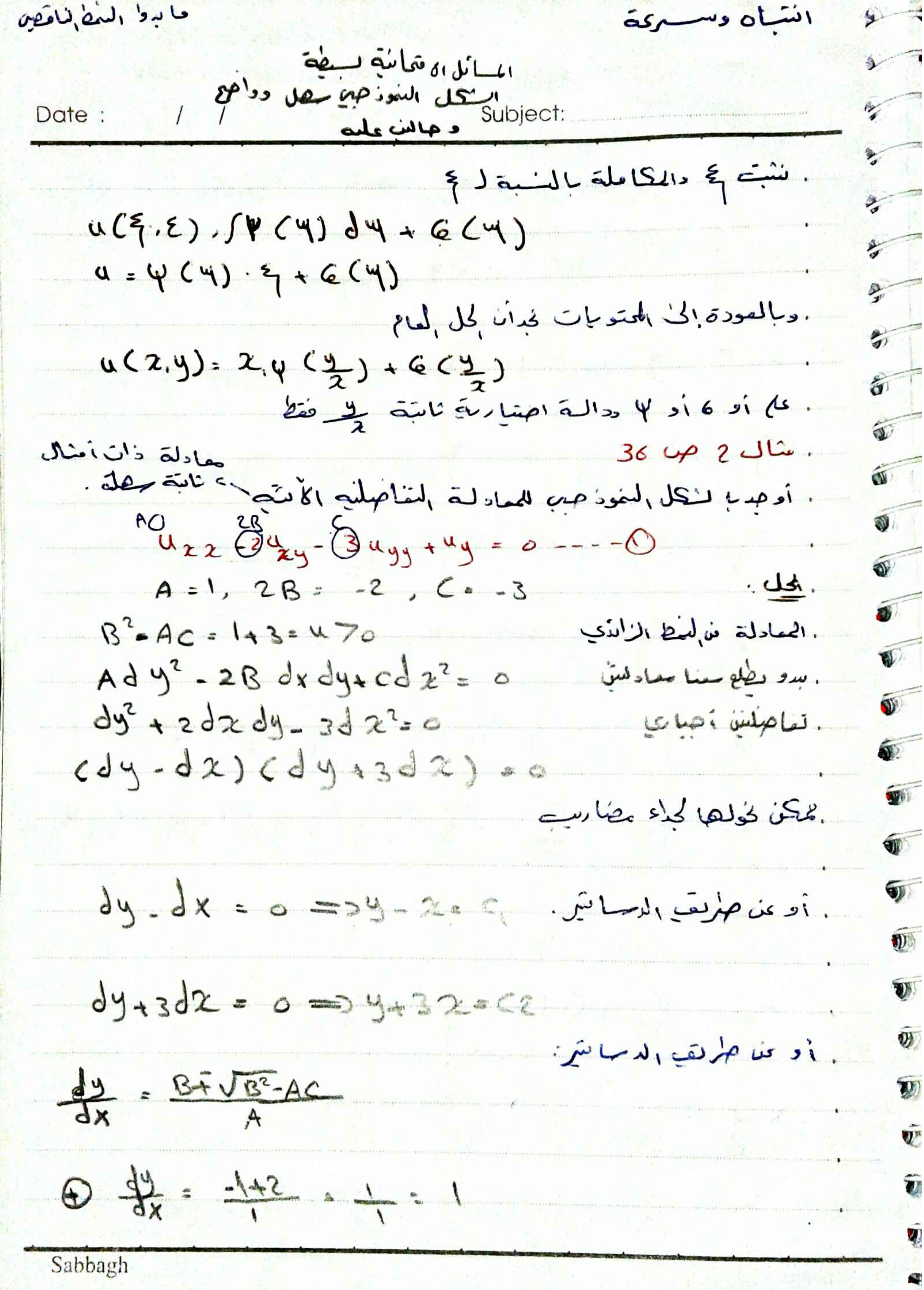
$u_\xi = \psi(\eta)$

مسألة كوشي فقط للنمط الزائدي
النمط الناقصي غير مطلوب

أو عن طريق المساير $\Leftarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}$

$\oplus$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-1+2}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$dy = dx \Rightarrow y = x + c_1 \Rightarrow y - x = c_1$



ما بدو النمط الناقص

التشابه وسركة

المسائل ال ثمانية بسيطة
الشكل النموذجي سهل وواضح
وحالك عليه

Date : / / Subject:

. نثبت ξ والمكاملة بالنسبة لـ ξ

$$u(\xi,\eta) = \int \varphi(\eta)\, d\eta + G(\eta)$$

$$u = \varphi(\eta)\cdot\xi + G(\eta)$$

. وبالعودة إلى المتحولات نجد أن الحل العام

$$u(x,y) = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$$

. علماً أن G أو φ دالة اختيارية تابعة $\frac{y}{x}$ فقط

. مثال 2 ص 36

. أوجد الشكل النموذجي للمعادلة التفاضلية الآتية ← معادلة ذات أمثال ثابتة سهلة.

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0 \quad ---(1)$$

. الحل: $A = 1,\ 2B = -2,\ C = -3$

. المعادلة من النمط الزائدي $B^2 - AC = 1+3 = 4 > 0$

. بدو يطلع معنا معادلتين تفاضليتين أصليتين

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$$

$$dy^2 + 2dx\,dy - 3dx^2 = 0$$

$$(dy - dx)(dy + 3dx) = 0$$

. يمكن تحويلها لجداء مضاريب

. أو عن طريق الدساتير.

$$dy - dx = 0 \Rightarrow y - x = c_1$$

$$dy + 3dx = 0 \Rightarrow y + 3x = c_2$$

. أو عن طريق الدساتير:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$(+)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1+2}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

مسألة كوشي فقط للنمط الزائدي
النمط الناقصي غير مطلوب

Date : / /   Subject:

$dy = dx \Rightarrow y = x + c_1 \Rightarrow y - x = c_1$

$\odot \ \frac{dy}{dx} = \frac{-1-2}{1} = -3$

$\Rightarrow \xi = y - x \ , \ \eta = y + 3x$

$\xi_x = -1 \ , \ \xi_y = 1 \ , \ \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0$

$\eta_x = 3, \ \eta_y = 1 \ , \ \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$

$u_x = u_\xi \ \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x$

$u_y = u_\xi \ \xi_y + u_\eta \ \eta_y \ , \ (u_y = u_\xi + u_\eta)$

$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + (\xi_x \cdot \eta_y) + \xi_y \cdot \eta_x) u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + 0$

— ★

$u_{xy} = -u_{\xi\xi} + (-1+3) u_{\xi\eta} + 3 u_{\eta\eta}$

$(u_{xy} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta})$

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\cdot\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\cdot\xi_x\,\eta_x + u_{\eta\eta}\,\eta_x^2 + 0$

$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$

$u_{yy} = u_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\cdot\xi_y\cdot\eta_y + u_{\eta\eta}\cdot\eta_y^2 + 0$

$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$

$u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\xi} - 6u_{\eta\eta} -$

$-3u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta} + u_\xi + u_\eta = 0$

فقط

$-12u_{\xi\eta} + u_\xi + u_\eta = 0$

$u_{\xi\eta} = \frac{1}{12}(u_\xi + u_\eta)$

لا يوجد الحل العام لها

وليس بالأمر السهل

لا تصح إلا بالطريقة العامة "بلاها"

ص 59 مثال رقم ٥ دورة

أوضع مثال بالشكل النموذجي

أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة بالشكل

$u_{xy} + u_x + y\,u_y + (y-1)\cdot u = 0$ --- ①

Date : / / Subject:

عن النمط الذي

المعادلة ① تكتب على الشكل الآتي:

$$\frac{\partial}{\partial x}[u_y + u] + y[u_y + u] - u = 0$$

عندما تأتي مسائل بهذا الشكل

ما علينا إلا تجميع الحدود المتشابهة

نفرض أن (2) $u_y + u = v$ ونعوض بالمعادلة.

$$v_x + y.v - u = 0 \Rightarrow$$

$$u = v_x + y v \quad ③$$

نشتق x بالنسبة لـ y

$$u_y = v_{xy} + v + y.v_y$$

$$v_{xy} + v + y.v_y + v_x + y.v = v$$

$$v_{xy} + v_x + y v_y + y.v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_y + v] + y[v_y + v] = 0$$

نجري التحويل $w = v_y + v$

نثبت y ونشتق بالنسبة لـ x $\quad w_x + y w = 0$

نثبت y لنحصل على معادلة ذات متحولات منفصلة

$$\frac{dw}{w} = -y\,dx$$

$y_1 + A(x)y = B x$ | $[M(x)y]' = B(x)M(x)$

عامل التكميل $M(x) = e^{\int A(x)dx}$ | $M(x) \cdot y = \int B(x)M(x)$

Date : / / Subject: $d(x) + C$ بالمكاملة

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل

. بالمكاملة نحصل على $\ln \frac{w}{G(y)} = -y \cdot x$

$w = \psi(y) \cdot e^{-yx}$

. نبدل w بما يساويها

$z_y + z = \psi(y) \cdot e^{-yx}$

مع // نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل هذا

نثبت x فنحصل على معادلة خطية لحدها والمتحول هو y

$M(y) = e^{\int dy} = e^{y}$

$[e^{y} \cdot z]' = \psi(y) \cdot e^{-yx} e^{y} = \psi(y) \cdot e^{y(1-x)}$

$e^{y} \cdot z = \int_0^y \psi\, \eta \cdot e^{\eta(1-x)} d\eta + G(x)$

$z = e^{-y} \int_0^y \psi(\eta) \cdot e^{(1-x)\eta} d\eta + e^{-y} G(x)$

$z_x = e^{-y} \int_0^y -\eta\, \psi(\eta) e^{(1-x)\eta} d\eta + e^{-y} G'(x)$

★. تصحيح الصفحة 52 سوف المثال 7

نضيف e^{-y} $(1-x)\eta$

e $d\eta$

★. مثال 7 ص 52

معادلة البيرداربو $\alpha = 1, B = 1$

$E(1,1) - d_{xy} - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-y} u_y = 0$

الشكل النموذجي
↓
ايجاد الحل العام
↓
ايجاد الحل الخاص بالشكل العام

Date :   Subject:

ايجاد معادلة ذات بالحالة العامة ---- كيغطونية

أول خطوة نضرب بـ $(x-y)$

$$(x-y)u_{xy} - u_x = 0$$

هي معادلة من النمط الزائدي ومعطاة بالشكل النموذجي

وهذه المعادلة تكتب على الشكل الآتي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-y)u_y - u\right] = 0$$

مشتق جداء: مشتق الثاني من بالأول + مشتق الأول من الثاني

نثبت y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أن

$$(x-y)u_y - u = \psi_1(y)$$

$$u_y \quad \frac{1}{x-y} \cdot u = \frac{u_1(y)}{x-y}$$

نثبت x نحصل على معادلة خطية لها عامل تكميل هو

$$M(y) = e^{\int \frac{1}{y-x}} = e^{\ln(y-x)} = y-x$$

دخلنا الإشارة السالبة

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فنحصل على معادلة بالشكل الآتي

$$[(y-x)\cdot u]' = -\psi(y) = \psi(y)$$

$$(y-x)u = -\int \psi_1(y)\,dy + \varphi(x)$$

$$\psi(y) + \varphi(x)$$

علماً أن ψ تابعة لـ y و φ تابعة لـ x فقط

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{y-x}$$

وهو الحل العام للمعادلة المطلوبة

تصحيح: ص 63 رقم 7 الجواب u_4 - بلاها

ص 65 رقم 5 $u(x,y) = \frac{2}{7}(y+2x) + f(3y-x)$

ملخص الفصل الأول